УДК 514.18

А. Я. Калиновський, *к.т.н., доцент, нач. каф. (ORCID 0000-0002-1021-5799)*
Л. М. Куценко, *д.т.н., професор (ORCID 0000-0003-1554-8848)*
О. І. Сухарькова, *викл. каф. (ORCID 0000-0003-1033-4728)*
С. Ю. Назаренко, *к.т.н., доцент, заст. нач. каф. (ORCID 0000-0003-0891-0335)*
О. О. Дячков, *к.е.н., викл. каф. (ORCID 0000-0002-7978-0024)*
Ю. М. Гринько, *к.держ.упр., викл. каф. (ORCID 0000-0003-1957-025X)*
Національний університет цивільного захисту України, Черкаси, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ В УМОВАХ НЕВАГОМОСТІ РОЗКРИТТЯ СТЕРЖНЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ ЯК БАГАТОЛАНКОВИХ МАЯТНИКІВ

Розглянуто геометричне моделювання стержневих конструкцій в умовах невагомості шляхом дослідження елементів їх каркасів, складених з багатоланкових маятників. Наведено геометричну модель розкриття таких конструкцій із урахуванням імпульсного впливу реактивних двигунів, встановлених на прикінцевих точках ланок. Механізм розкриття ґрунтується на ініціюванні інерційного руху без зовнішнього контролю після короткочасного імпульсного впливу. Динаміка процесу розкриття описана за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду, причому особливу увагу приділено адаптації формулювання до умов мікрогравітації, де значення потенціальної енергії можна вважати близькою до нуля. Це забезпечує практично точне моделювання розкриття конструкцій виключно під дією кінетичної енергії, без подальшого зовнішнього керування. В результаті дії імпульсів розкриття маятника відбувається за інерцією. Звідси зрозумілим є вибір терміну «інерційний спосіб розкриття каркасу». Розроблено математичні моделі та методику одержання комп'ютерної анімації для прогнозування положення ланок у часі й визначення моменту фіксації (стоп-коду) бажаного положення конструкції. Досліджено похибки імпульсних впливів на точність розкриття і встановлено допустимі межі відхилення для збереження прийнятної форми стержневої конструкції. Наведено тестові приклади розкриття дволанкових і чотириланкових маятників, а також спеціальних конфігурацій – магдебурзького маятника і маятника Томсона-Тета. Одержані результати доцільно використовувати в режимі анімації для унаочнення динаміки формування стержневих конструкцій. Проілюструвати розкриття силових каркасів для сонячних дзеркал чи космічних антен. Ці підходи дозволяють спростити технології керування розкриттям об'єктів без потреби в складних електромеханічних приводах, що особливо важливо для зниження маси і вартості космічних місій.

Ключові слова: стержнева конструкція, процес розкриття у невагомості, багатоланковий маятник, рівняння Лагранжа

1. Вступ

Керування розкриттям стержневих конструкцій у невагомості є складною задачею механіки [1–4]. Під поняттям «стержнева конструкція» далі розуміємо геометричне тіло, складене зі стержнів, довжини яких значно перевищують їх інші розміри. Для розрахунків геометричної форми послідовних фаз розкриття «маятникових» конструкцій, складених зі стержнів, слід використати дослідження, присвячених динаміці багатоланкових маятників [5–8]. Це пов'язано з адаптуванням до невагомості процесу коливання багатоланкового маятника як геометричної моделі розкриття каркасу об'єкта. В результаті прийдемо до необхідності робіт, присвячених можливості застосування рівнянь Лагранжа другого роду для механічних систем у невагомості [9].

До позаземного простору невагомості комплекти стержнів доставляються у складеному вигляді (як касети), після чого виконується операція розкриття стержнів для надання робочої форми всій конструкції. Розрахунок стержневих конструкцій такого класу пропонується здійснювати на основі Лагранжевої динаміки багатоланкових маятників як консервативної системи. Це дозволить одержати геометричні моделі послідовних фаз (анімації) розкриття стержневих конструкцій з врахуванням їх динамічних властивостей. Застосування таких моделей на етапі проектування допоможе при подальших дослідженнях розрахувати параметри функціонування конструкції в цілому.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

У роботі [10] розглядаються методи керування трансформацією гнучких космічних маніпуляторів, зокрема у контексті стабільності та ефективності розкриття. Особливо цінною є увага до мультизв'язкових систем, подібних до маятникових механізмів, що підкреслює потребу у складному геометричному й динамічному моделюванні для забезпечення надійності в умовах мікрогравітації. В роботі [11] розглядається процес складання та розгортання композитних конструкцій зі замкненим поперечним перерізом типу Dual-Matrix. У роботі [12] розглядається створення й моделювання матеріалів з високим рівнем деформації для розгортання космічних конструкцій. На практиці більш вживаними є каркасні тросові системи розкриття. У роботах [13] наведені математичні моделі процесу розкриття багатоланкової каркасної конструкції сонячної батареї із тросовою системою синхронізації. На схемах розкриття конструкції за допомогою електродвигунів та тросів здійснюється синхронізація зміни величин кутів між суміжними ланками. Для створення спеціальних конструкцій застосовуються багатошарові композити, які мають високу жорсткість та здатність зберігати форму після багаторазових згинань [14, 15]. Вибір матеріалів для ланок конструкції варіюється від вуглецевих волокон до полімерних матеріалів, які дозволяють досягти оптимального співвідношення між міцністю та вагою [16, 17].

Прототипом розглянутого у роботі способу розкриття багатоланкової стержневої конструкції є тросова система [18–20]. У роботах [21, 22] започатковано геометричну модель розкриття на уявній площині у невагомості стержневої конструкції як багатоланкового маятника. Вважалося, що рушіями розкриття є реактивні імпульсні двигуни, встановлені на прикінцевих точках ланок. В роботах [23–25] наведено відомі схеми розкриття стержневих конструкцій.

В результаті огляду виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступну проблему досліджень. Для реалізації ідеї розгортання багатоланкових конструкцій у невагомості необхідно дослідити інерційну систему розкриття для конкретних маятників, де ініціювання коливань здійснюється імпульсами реактивних двигунів. Тут імпульси мають впливати на певні вузлові елементи конструкції. Необхідно дослідити прояви можливих похибок величин імпульсів. А також розглянути питання фіксації елементів багатоланкової конструкції в наперед розрахованому розгорнутому стані. Дослідження провести з використанням комп'ютерної анімації для елементів стержневих конструкцій.

3. Мета та завдання дослідження

Метою роботи є опис у вигляді алгоритму розкриття стержневого каркасу в умовах невагомості як геометричних моделей коливання конкретних багатоланкових маятників. У нашому випадку для прикладу: подвійного, чотириланкового, магдебурзького та маятника Томсона-Тета. Вважається, що розкриття конструкції здійснюється завдяки імпульсам реактивних двигунів, які діють на прикінцеві точки (тобто вузли) ланок маятника.

Для досягнення поставленої мети потрібно вирішення наступних завдань:

– розробити геометричні моделі процесу розкриття двохланкових маятників;
– розробити геометричні моделі процесу розкриття чотириланкових маятників;
– розробити геометричні моделі процесу розкриття магдебурзького маятника;
– розробити геометричні моделі процесу розкриття маятника Томсона-Тета.

4. Матеріали та методи дослідження

Об'єктом досліджень є механічні конструкції спеціального призначення, утворені системою взаємопов'язаних стержнів, і які орієнтовані на експлуатацію в умовах невагомості. Предметом досліджень є опис множини стержнів як каркасу конструкції, кожний елемент якої має вигляд багатоланкового маятника. Гіпотеза досліджень полягає у можливості наближення форми конструкції зі значенням потенціальної енергії близькою до нуля. Тому на стержневу конструкцію впливатимуть лише параметри її кінетичної енергії.

Методи дослідження:

- для ініціювання коливань обираються імпульсні реактивні двигуни, встановлені на прикінцевих точках ланок маятника;
- складається система рівнянь Лагранжа другого роду, розв'язками якої є початкові кути відхилень, а також швидкості, наданих кутам відхилень;
- з відповідними початковими умовами система рівнянь Лагранжа другого роду розв'язується в середовищі математичного пакету Maple;
- аналіз комбінації початкових імпульсів дозволяє оцінити точність фінального положення елементів конструкції, а також дозволяє обчислити відповідні значення «стоп-коду».

5. Розробка геометричних моделей процесу розкриття у невагомості стержневих конструкцій як багатоланкових маятників

5.1. Геометричні моделі процесу розкриття двохланкових маятників

В статті продовжені дослідження, розпочаті в роботах [21–25]. Звідси було обрано рисунки, пояснення одержаних результатів при цьому суттєво оновлено.

Розглянемо імпульсні реактивні двигуни, встановлені на прикінцевих точках ланок маятника. Імпульсні реактивні двигуни повинні закріплюватися так, щоб їх дія була спрямована по нормалі до відповідної ланки. Ідею їх використання пояснимо на прикладі стержневої конструкції у вигляді подвійного маятника (рис. 1).

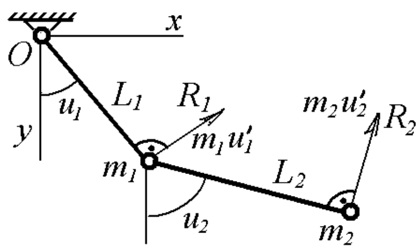


Рис. 1. Схема двохланкового маятника

Для цього оберемо уявну площину з декартовими координатами Oxy, на якій в умовах невагомості буде коливатися маятник. Він складатиметься з двох невагомих нерозтяжних стержнів довжиною L_1 і L_2, шарнірно сполучених між собою вузловою точкою. На кінцях стержнів закріплено вантажі з масами m_1 і m_2. Нехай початок першої ланки маятника збігається з початком координат O. Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_1(t)$ і $u_2(t)$, утворені на площині відповідними ланками з напрямком відліку (рис. 1). За умови відсутності дисипативних сил і з врахуванням «нульової» потенціальної енергії опис коливання маятника на уявній площині виконаємо на основі лагранжіана

$$L = 0.5\left[m_1\left(x_1'^2 + y_1'^2\right) + m_2\left(x_2'^2 + y_2'^2\right)\right], \tag{1}$$

де $x_1(t) = L_1 \sin(u_1(t))$; $y_1(t) = L_1 \cos(u_1(t))$;

$$x_2(t) = x_1(t) + L_2 \sin(u_2(t));\, y_2(t) = y_1(t) + L_2 \cos(u_2(t)); \tag{2}$$

В цьому випадку система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд

$$m_1L_1u_1'' + m_2L_2u_2'' \cos(u_1 - u_2) + m_2L_2(u_1')^2 \sin(u_1 - u_2) + m_2L_1u_1'' = 0;$$

$$L_1u_1'' \cos(u_1 - u_2) - L_1(u_1')^2 \sin(u_1 - u_2) + L_2u_2'' = 0. \tag{3}$$

Тут $u_1' = \dfrac{d}{dt}u_1(t)$; $u_2' = \dfrac{d}{dt}u_2(t)$; $u_1'' = \dfrac{d^2}{dt^2}u_1(t)$; $u_2'' = \dfrac{d^2}{dt^2}u_2(t)$ – похідні функції опису узагальнених координат.

При розв'язанні системи рівнянь (3) слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок маятника: $L=\{L_1, L_2,\}$; значень мас вантажів: $m=\{m_1, m_2\}$; значень початкових кутів відхилень: $U=\{u_1(0), u_2(0)\}$, а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень: $U'=\{u_1'(0), u_2'(0)\}$.

З виконанням початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду (3) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету maple, і одержані розв'язки позначено символами $U_1(t)$, $U_2(t)$. Це дозволяє на площині в системі координат Oxy визначити координати прикінцевої вузлової точки (x_2, y_2) другої ланки маятника в момент часу t. Для обчислення цих координат у виразах (2) слід замінити малі літери u на великі U.

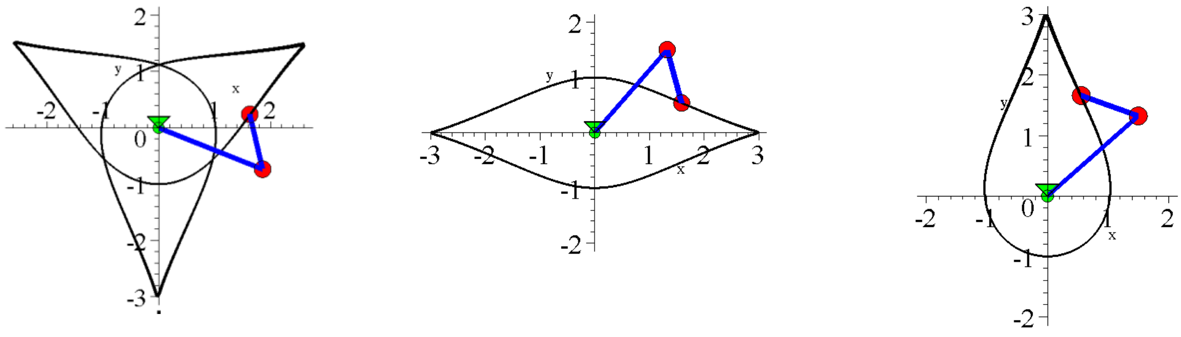
Наведемо приклад визначення нехаотичних траєкторій коливань другого вантажу маятника шляхом розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду. Враховуючи те, що двохланкова конструкція доставлятиметься у складеному вигляді, то спільною для всіх прикладів буде початкова умова $U=\{0, \pi\}$. Приклади реалізацій розкриття стержневих маятників в невагомості у вигляді анімацій можна знайти на ресурсі [25].

Приклад. $L=\{2, 1\}$; $m=\{1, 2\}$. На рис. 2 наведені результати обчислень залежно від координат вектора $U'=\{u_1'(0), u_2'(0)\}$.

Зображені на рис. 2 криві є прикладом циклічної нехаотичної траєкторії прикінцевої точки двохланкового маятника (циклічної траєкторії з особливими точками «загострення»), яку можна застосувати при виготовленні «зацепів» конструкцій в невагомості. Варіанти рисунків наведено в роботі [25, рис. 3–6].

5.2. Геометричні моделі процесу розкриття чотириланкових маятників

Розвиваючи результати робіт [21, 22], у якості другого прикладу, наведемо розрахунки розкриття чотириланкової маятникової конструкції (рис. 3). Вважатимемо, що виконуються всі умови попередніх припущень. Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$, утворені на площині відповідними ланками з напрямком відліку.



а б в

Рис. 2. Обчислення для прикладу залежно від координат вектора U′: а – U′={1; 0,65}; б – U′={1; 0,05}; в – U′={1; 0,947}

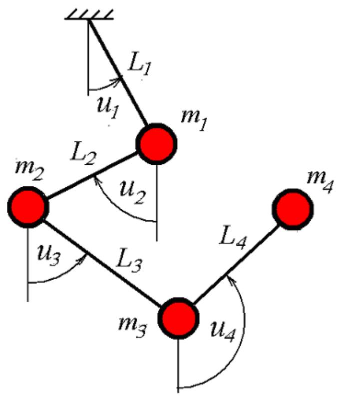


Рис. 3. Схема чотириланкового маятника

За допомогою узагальнених координат обчислюємо координати вузлових точок маятника:

$$x_1(t) = L_1 \sin(u_1(t))\,;\; y_1(t) = L_1 \cos(u_1(t))\,;$$

$$x_2(t) = x_1(t) + L_2 \sin(u_1(t))\,; y_2(t) = y_1(t) + L_2 \cos(u_2(t))\,; \tag{4}$$

$$x_3(t) = x_2(t) + L_3 \sin(u_3(t)) \;\; y_3(t) = y_2(t) + L_3 \cos(u_3(t))\,;$$

$$x_4(t) = x_3(t) + L_4 \sin(u_4(t)) \;\; y_4(t) = y_3(t) + L_4 \cos(u_4(t))\,.$$

За умови відсутності дисипативних сил і з врахуванням «нульової» потенціальної енергії опис коливання маятника на уявній площині виконаємо на основі лагранжіана:

$$L = 0{,}5\left[m_1(x_1'^2 + y_1'^2) + m_2(x_2'^2 + y_2'^2) + m_3(x_3'^2 + y_3'^2) + m_4(x_4'^2 + y_4'^2)\right]. \tag{5}$$

Опис руху чотириланкового маятника одержимо у вигляді системи з чотирьох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$ (з причини громіздкості тут не наведено). При розв’язанні одержаної системи слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок маятника: L={L_1, L_2, L_3, L_4}; значень «мас» вузлів: m={m_1, m_2, m_3, m_4}; значень початкових кутів відхилень: U={$u_1(0)$, $u_2(0)$, $u_3(0)$, $u_4(0)$}, а також значень початкових швидкостей, наданих кутам відхилень U′={$u_1'(0)$, $u_2'(0)$, $u_3'(0)$, $u_4'(0)$}. Всі значення параметрів в умовних величинах.

З врахуванням відповідних початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету maple, і одержані розв'язки позначено символами $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ і $U_4(t)$. В обраний на площині системі координат Oxy з використанням одержаних розв'язків визначаємо координати вузлових точок в момент часу t. Для цього використовуємо вирази (4) для обчислення координат вузлів маятника за допомогою узагальнених координат, замінивши там малі літери u на великі U. За допомогою складеної maple програми крім переміщення вузлових точок можна визначити швидкості, що дає можливість будувати відповідні фазові траєкторії переміщення. Багатоланкову каркасну конструкцію на орбіту доставляють у складеному вигляді (наочно це нагадує побутовий метр у складеному стані). Тобто початкове положення множини ланок маятника має «складений» вигляд, і вектор значень початкових кутів відхилень завжди матиме координати U={π/2, –π/2, π/2, –π/2}.

Наведемо тестовий приклад геометричного моделювання розкриття чотириланкових каркасів. Після виконання програми одержимо послідовність кадрів анімаційних зображень залежно від часу розкриття конструкції [25].

Приклад. Довжини ланок: L={4.3, 5, 3.5, 6}. Імпульси U′={1, 0, 0, 0.5} забезпечують двигуни, які розташовані на першому та четвертому вантажах.

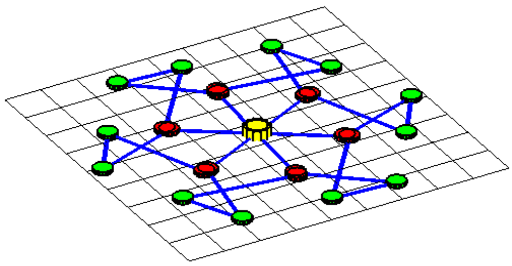


Рис. 4. Стержнева конструкція прикладу в момент часу t=1,76

На рис. 4 наведено стан стержневої конструкції після розкриття шести маятників в момент часу t=1.76. Її визначатимуть наступні значення координат вектора «стоп-коду» U_{STOP} = {3.074, –2.276, 1.5, –0.6652}. Їх аналіз показує, що на фінальній стадії розкриття швидкості вузлів матимуть значення: $u_1'(1,76) = 1$; $u_2'(1,76) = –0.8$; $u_3'(1,76) = 0$; $u_4'(1,76) = 0.45$. Інші варіанти рисунків наведено в роботі [25, рис. 8–14].

5.3. Геометричні моделі процесу розкриття магдебурзького маятника

Наведемо розрахунки розкриття нелінійної стержневої конструкції у вигляді магдебурзького маятника. Під терміном «магдебурзький маятник» розуміємо конструкцію [26], яка експонується в музеї «Вежа Століття» у німецькому місті Магдебург, і призначена для демонстрації хаотичних коливань. Конструкція складається з двох стержнів (рис. 5). Перший стержень однією з внутрішніх точок прикріплений до нерухомої точки O, а другий стержень своїм кінцем прикріплений до точки першої ланки.

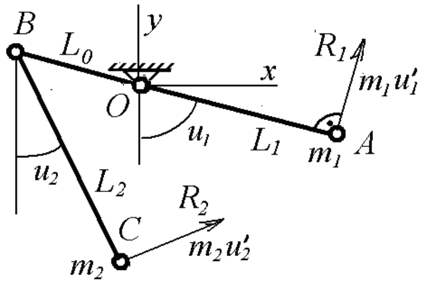


Рис. 5. Схема магдебурзького маятника

Вважатимемо, що виконуються всі умови попередніх припущень. Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_1(t)$ і $u_2(t)$, утворені на площині відповідними ланками з віссю Oy як напрямком відліку. За допомогою узагальнених координат визначимо декартові координати вузлових точок маятника:

$$x_A(t) = L_1 \sin(u_1(t));\ y_A(t) = L_1 \cos(u_1(t));$$

$$x_B(t) = -L_0 \sin(u_1(t));\ y_B(t) = -L_0 \cos(u_1(t)); \tag{6}$$

$$x_C(t) = x_B(t) + L_2 \sin(u_2(t));\ y_C(t) = y_B(t) + L_2 \cos(u_2(t)).$$

За умови відсутності дисипативних сил і з врахуванням «нульової» потенціальної енергії опис коливання маятника виконаємо на основі лагранжіана

$$L = 0{,}5 m_1 L_1^2 u_1'^2 - m_2 L_0 L_2 u'v' \cos(u_1 - u_2) + 0{,}5 m_2 L_0^2 u_1'^2 + 0{,}5 m_2 L_2^2 u_2'^2 + 0{,}5 J u_2'^2. \tag{7}$$

В цьому випадку система рівнянь Лагранжа другого роду матиме вигляд

$$\begin{gathered} m_1 L_1^2 u_1''^2 - m_2 L_0 L_2 u_2'' \cos(u_1 - u_2) - m_2 L_0 L_2 u_2'^2 \sin(u_1 - u_2) + m_2 L_0^2 u_1'' = 0; \\ - m_2 L_0 L_2 u_1'' \cos(u_1 - u_2) - m_2 L_0 L_2 u_1'^2 \sin(u_1 - u_2) + m_2 L_2^2 u_2'' + J u_2'' = 0; \end{gathered} \tag{8}$$

Тут $u_1' = \dfrac{d}{dt} u_1(t)$; $u_2' = \dfrac{d}{dt} u_2(t)$; $u_1'' = \dfrac{d^2}{dt^2} u_1(t)$; $u_2'' = \dfrac{d^2}{dt^2} u_2(t)$ – похідні функції опису узагальнених координат; J=0,1 – момент інерції другої ланки.

При розв'язанні системи рівнянь (8) слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок маятника: $L=\{L_0, L_1, L_2,\}$; значень мас вантажів: $m=\{m_1, m_2\}$; значень початкових кутів відхилень: $U=\{u_1(0), u_2(0)\}$, а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень: $U'=\{u_1'(0), u_2'(0)\}$. З врахуванням початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду (8) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету Maple, і одержані розв'язки позначено символами $U_1(t)$, $U_2(t)$. Для обчислення декартових координат точки C на другій ланці маятника у виразах (6) слід замінити малі літери u на великі U. В результаті виконання програми одержимо залежно від часу послідовність кадрів розкриття конструкції у вигляді комп'ютерних анімаційних зображень.

Наведемо приклад визначення результату розкриття стержневих конструкцій типу магдебурзького маятника. Оскільки двохланкова конструкція доставлятиметься у складеному вигляді, то спільною для всіх прикладів буде початкова умова U={0, 0}. Значення всіх параметрів в умовних величинах.

Приклад. L={1, 1.5, 1.5}; m={1, 1}. На рис. 6 наведені траєкторії точки залежно від координат вектора U′={$u_1'(0)$, $u_2'(0)$}.

а) б)

Рис. 6. Обчислення для прикладу залежно від координат вектора U′: а – U′={1; – 0,7098}; б – U′={1; – 0,6569}

Зазначимо, що періодичні рухи другого вантажу двохланкового маятника можна використовувати при реалізації на орбіті певних операцій [23, 24]. Також було встановлено, що похибка у розмірі «процент величини» по різному впливає на результат розкриття різних подвійних маятників. Найголовнішим є те, що для маятників з параметрами L={1, 0.5, 1.5}; m={1, 1}; U′={1, –0.788}; U′={1, –0.5743}; U′={1, –0.8815} траєкторії руху прикінцевої точки збігаються і відрізняються лише напрямками її переміщення. Інші варіанти рисунків наведено в роботі [25, рис. 18–20].

5.4. Геометричні моделі процесу розкриття маятника Томсона-Тета

В четвертому прикладі розглянемо розкриття нелінійної стержневої конструкції у вигляді маятника Томсона-Тета [27], який можна використовувати для унаочнення деяких процесів ядерної фізики. Конструкція складається з двох стержнів. Перший стержень початком прикріплений до нерухомої точки О, а другий стержень своєю серединою прикріплений до прикінцевої точки першої ланки (рис. 7).

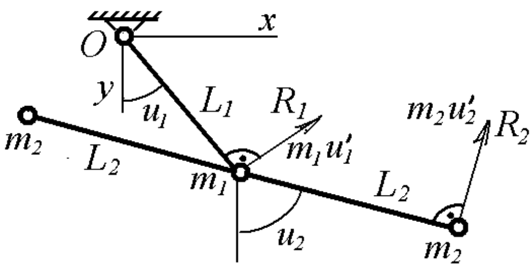


Рис. 7. Схема маятника Томсона-Тета

Вважатимемо, що виконуються всі умови попередніх припущень. Узагальненими координатами оберемо кути $u_1(t)$ і $u_2(t)$, утворені на площині відповідними ланками з віссю Оу як напрямком відліку. За допомогою узагальнених координат визначимо координати вузлових точок маятника:

$$x_1(t) = L_1 \sin(u_1(t)); \; y_1(t) = L_1 \cos(u_1(t));$$

$$x_2(t) = x_1(t) + L_2 \sin(u_2(t)) \;\; y_2(t) = y_1(t) + L_2 \cos(u_2(t)); \tag{9}$$

$$x_3(t) = x_1(t) - L_2 \sin(u_2(t)) \;\; y_3(t) = y_1(t) - L_2 \cos(u_2(t)).$$

За умови відсутності дисипативних сил і з врахуванням «нульової» потенціальної енергії опис коливання маятника виконаємо на основі лагранжіана

$$L = m_2(2L_1^2 u_1'^2 + L_2^2 u_2'^2). \tag{10}$$

В цьому випадку система рівнянь Лагранжа другого роду матиме вигляд

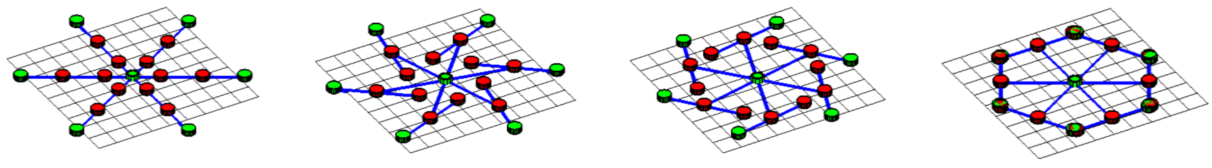
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = m_2 L_1^2 u_1'' = 0; \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = m_2 L_2^2 u_2'' = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Тут $u_1' = \frac{d}{dt}u_1(t)$; $u_2' = \frac{d}{dt}u_2(t)$; $u_1'' = \frac{d^2}{dt^2}u_1(t)$; $u_2'' = \frac{d^2}{dt^2}u_2(t)$ – похідні функції опису узагальнених координат. Звернемо увагу на те, що у рівняння (11) не входить m_1. Пояснення цього феномену наведено в роботі [28].

При розв'язанні системи рівнянь (11) слід враховувати координати таких векторів: довжин ланок маятника: $L=\{L_1, L_2,\}$; значень мас вантажів: $m=\{m_1, m_2\}$; значень початкових кутів відхилень: $U=\{u_1(0), u_2(0)\}$, а також значень швидкостей, наданих кутам відхилень: $U'=\{u_1'(0), u_2'(0)\}$. З врахуванням початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду (11) розв'язано наближено методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету maple, і одержані розв'язки позначено символами $U_1(t)$, $U_2(t)$. Для обчислення декартових координат прикінцевих точок на другій ланці маятника у виразах (9) слід замінити малі літери u на великі U.

Наведемо приклад визначення результату розкриття стержневих конструкцій типу Томсона-Тета шляхом розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду. Оскільки двохланкова конструкція доставлятиметься у складеному вигляді, то спільною для всіх прикладів буде початкова умова $U=\{0, 0\}$. Значення всіх параметрів в умовних величинах.

Приклад. $L=\{1.52, 0.91\}$; $m=\{1, 1\}$ $U'=\{1, -0.5\}$. На рис. 8 наведено послідовні кадри процесу розкриття конструкції залежно від часу t. «Стоп-кодом» в момент часу t = 1.05 будуть числа $U_{STOP}\{1.05; -0.525\}$. Інші варіанти рисунків наведено в роботі [25, рис. 22–24].



а) б) в) г)

Рис. 8. Розкриття маятника Томсона-Тета залежно від часу: а – t = 0; u_1 = 0; u_2 = 0; б – t = 0.315; u_1 = 0.315; u_2 = –0.158; в – t = 0.718; u_1 = 0.718; u_2 = –0.359; г – t = 1.05; u_1 = 1.05; u_2 = –0.525

В результаті досліджень були перевірені наступні властивості маятника Томсона-Тета, які сприятимуть його використанню при конструюванні систем розкриття стержневих конструкцій у невагомості. В момент часу t величини кутів розкриття пропорційні відповідним початковим швидкостям зміни кутів $u_1'(0)$ і $u_2'(0)$. В процесі розкриття поточні швидкості зміни кутів постійні і співпадають з початковими швидкостям $u_1'(0)$ і $u_2'(0)$. Розкриття стержневої конструкції типу маятника Томсона-Тета не залежать від маси m_1. Інші властивості маятника Томсона-Тета розглянуті в роботі [29].

6. Обговорення результатів інерційного способу розкриття багатоланкових маятників

Отримані результати пояснюються можливістю використовувати процес ініціювання коливань маятників як фізичну аналогію удару «умовним імпульсом» по кінцевому вузловому елементу багатоланкового маятника. Реалізувати такий підхід на практиці слід імпульсними реактивними двигунами, дія яких спрямована по нормалі до відповідних ланок маятника. Після дії імпульсами на вузлові елементи маятника величина кінетичної енергії приймається незмінною, а одержана коливальна система сприймається як консервативна (для малих проміжків часу).

Особливості запропонованого методу і отриманих результатів в порівнянні з існуючими полягають у новій трактовці «стоп-коду» – тобто набору узагальнених координат, що відповідають фіксованим ланкам маятника в наперед розрахованому положенні. Цим забезпечується необхідна кінцева геометрична форма стержневої конструкції. Важливим є також спосіб оцінки допустимих похибок величин імпульсів для досягнення розкриття певної форми (що рідко розглядається в аналогічних роботах). Розглянуто можливість визначення циклічних траєкторій переміщення вузлових точок з особливими точками, які мають вигляд «загострення».

Дослідження обмежується поняттям ідеалізації геометричних моделей: нехтування дисипативними силами, спрощене припущення про «нульову» потенціальну енергію, рівнозначність за величинами мас ланок. Також модель передбачає рух виключно у двовимірній площині, що не враховує реальні просторові впливи.

Серед недоліків вкажемо на обмеження, пов’язані з використанням концепції багатоланкових маятників, довжини і маси ланок яких переважно не однакові. В перспективі ці труднощі можуть бути усунуті за допомогою розв’язання оберненої задачі компоновки. Тобто по заданому кінцевому розташуванню елементів маятників слід визначити раціональний набір його параметрів та початкових умов, які забезпечать задане розкриття.

Розвиток даного напрямку досліджень полягає у детальному дослідженні інерційної системи розкриття за умови існування не однакових за величинами мас вузлових елементів конструкції. Режим анімації динаміки формування конструкцій сприятиме обґрунтуванню обчислення параметрів стержневих конструкцій. У тому числі і для специфіки виконання рятувальних робіт.

7. Висновки

1. Для одержання циклічних траєкторій двохланкових маятників визначено параметри їх прикінцевих точок, які мають особливі точки «загострення». Для тестових параметрів L={2, 1}; m={1, 2} можливо обчислювати значення швидкостей, наданих кутам відхилень: $U'=\{u_1'(0),\ u_2'(0)\}$. На рис. 2 наведено приклади циклічних траєкторій залежно від варіантів U′={1; 0,65}; U′={1; 0,05}; U′={1; 0,947}.

2. Для моделювання дії імпульсного реактивного двигуна розроблено схему ініціювання коливань шляхом впливу імпульсом на прикінцеві точки ланок конкретного маятника, що дозволило змоделювати динаміку розкриття багатоланкової стержневої конструкції, та спостерігати за нею в режимі комп'ютерної анімації. Розглянуто розкриття стержневих конструкцій типу Томсона-Тета з параметрами L={1.52, 0.91}; m={1, 1} U′={1, –0.5}. Послідовні кадри процесу розкриття конструкції, коли «стоп-кодом» в момент часу t =1.05 будуть числа U_{STOP}{1.05; –0.525}. На рис. 8 зображено анімаційні кадри розкриття маятника Томсона-Тета залежно від часу.

3. На графічному рівні досліджено важливе питання похибки значення імпульсу для ініціювання коливань маятника, щоб одержати прийнятне розташування його ланок. Графічний підхід базується на використанні сумісних зображень та числовому порівнянні за допомогою комп'ютерної анімації трьох варіантів розкриття з близькими значеннями їх початкових умов.

4. Одержані розв'язки системи рівнянь Лагранжа другого роду у невагомості дозволили протестувати у якості елементів конструкції конкретні види багатоланкових маятників: подвійного, чотириланкового, магдебурзького та Томсона-Тета. Отримані результати підтверджують доцільність застосування інерційного способу розкриття для моделювання конструкцій із заданою геометрією. Зазначені різновиди маятників планується доповнити.

Література

1. Алпатов А. П., Горбулин В. П. Космические платформы для орбитальных промышленных комплексов: проблемы и перспективы. Вісник НАН України. 2013. № 12. С. 26–38.

2. Алпатов А. П., Белоножко П. А., Белоножко А. А., Витушкин А. А. Большие отражающие поверхности в космосе. Антенны спутникой связи. Системні технології. 2007. № 3(50). С. 73–87.

3. Алпатов А. П., Белоножко П. А., Белоножко А. А., Витушкин А. А. Большие отражающие поверхности в космосе. Радотелескопы, солнечные концентраторы, плоские отражатели. Системні технології. 2007. № 3(50). С. 88–101.

4. Hoyt R. SpiderFab. Architecture for On-Orbit Manufacture of Large Aperture Space Systems. FISO Briefing, 2015. 33 p.

5. Алпатов А.П. Динаміка перспективних космічних апаратів. Вісник НАН України. 2013. № 7. С. 6–13

6. Udwadia F. E., Koganti P. B. Dynamics and control of a multi-body planar pendulum. Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 82. № 1–2. P. 1059–1059. doi: 10.1007/s11071-015-2362-0

7. Lope A. M., Machado J. A. Dynamics of the N-link pendulum: a fractional perspective. International Journal of Control. 2017. Vol. 90. № 6. P. 1192–1192.

8. Fritzkowski P., Kaminski H. Dynamic of a rope as a rigid multibody system. Journal of mechanics of materials and structures. 2008. Vol. 3. № 6. P. 1059–1075.

9. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity. Chaotic Modeling and Simulation. 2014. P. 57–67. URL: https://www.researchgate.net/publication/285143816_Dynamics_of_multiple_pendula_without_gravity

10. Pisculli A., Felicetti L., Gasbarri P., Palmerini G B., Sabatini M. Deployment analysis and control strategies of flexible space manipulators, in: Proceedings of the In-

ternational Astronautical Congress. China. 2013. URL: https://www.researchgate.net/publication/288131553_Deployment_analysis_and_control_strategies_of_flexible_space_manipulators

11. Sakovsky M., Pellegrino S., Mallikarachchi H. M. Y. C. Folding and Deployment of Closed Cross-Section Dual-Matrix Composite Booms. 3rd AIAA Spacecraft Structures Conference. 2016. doi: 10.2514/6.2016-0970

12. Ma X., An N., Cong Q. et al. Design, modeling, and manufacturing of high strain composites for space deployable structures. Communications Engineering. 2024. Vol. 78. doi: 10.1038/s44172-024-00223-2

13. Deployable Perimeter Truss with Blade Reel Deployment Mechanism. NASA's Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.Tuesday, 01 March 2016. URL:https://www.techbriefs.com/component/content/article/tb/techbriefs/mechanics-and-machinery/24098

14. Шамаханов В. К., Хорошилов С. В. Особливості створення та використання космічних стрілоподібних конструкцій, що трансформуються. Journal of Rocket-Space Technology. 2025. № 34(1). С. 3–20. doi: 10.15421/452501

15. Jennings A.L., Black J., Allen C. Empirically Bounding of Space Booms with Tape Spring Hinges. Shock and Vibration. 2013. Vol. 20. P. 503–518. doi: 10.3233/SAV-130764

16. Liu T.-W., Bai J.-B., Fantuzzi N. Folding behavior of the thin-walled lenticular deployable composite boom: Analytical analysis and many-objective optimization. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2022. Vol. 30. № 11. P. 2221–2239. doi: 10.1080/15376494.2022.2053766

17. Yang H., Guo H., Wang Y., Feng J., Tian D. Analytical solution of the peak bending moment of an M boom for membrane deployable structures. International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 206. P. 236–246. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.09.005

18. Martınez-Alfaro H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for N pendulums using Maple. URL: https://www.researchgate.net/publication/228781742_Obtaining_the_dynamic_equations_their_simulation_and_animation_for_n_pendulums_using_Maple

19. Xu Yan, Guan Fu-ling, Zheng Yao, Zhao Mengliang. Kinematic Analysis of the Deployable Truss Structures for Space Applications. J. Aerosp. Technol. Manag., Sao Jose dos Campos. 2012. Vol. 4. № 4. P. 453–462. doi: 10.5028/jatm.2012.04044112

20. Hoyt R., Cushing J., Slostad J. SpiderFab: Process for On-Orbit Construction of Kilometer-Scale Apertures. NASA Goddard Space Flight Center 8800 Greenbelt Road Greenbelt, MD 20771, 2013. 53 p.

21. Kutsenko L., Shoman O., Semkiv, O., Zapolsky L., Adashevskay I., Danylenko V., Semenova-Kulish V., Borodin D., Legeta J. Geometrical modeling of the inertial unfolding of a multi-link pendulum in weightlessness. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. 6/7(90). P. 42–50.

22. Куценко Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання інерційного розкриття багатоланкового маятника у невагомості. 2017. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/4868

23. Kutsenko L., Semkiv O., Zapolskiy L., Shoman O., Kalinovskiy A., Piksasov M., Adashevska I., Shelihova I., Sydorenko O. Geometrical modeling of the

process of weaving a cloth in weightlessness using the inertial unfolding of dual pendulum. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. 1/7(91). P. 37–46. doi: 10.15587/1729-4061.2017.114269

24. Куценко Л. М. Ілюстрації до геометричного моделювання процесу розкриття стержневих конструкцій у невагомості. 2018. URL: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6335

25. Kutsenko L., Semkiv O., Zapolskiy L., Shoman O., Ismailova N., Vasyliev S., Adashevska I., Danylenko V., Pobidash A. Geometrical modeling of the shape of a multilink rod structure in weightlessness under the influence of pulses on the end points of its links. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. 2/7(92). P. 44–58. doi: 10.15587/1729-4061.2018.126693

26. Chaotic Pendulum. Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations. URL: https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/chaotic-pendulum

27. Space_Structure_Systems_Laboratory. Self deployable truss, 2016. YouTube. URL: https://www.youtube.com/watch?v=sH7NHZwPzMM

28. Qi X., Deng Z, Li B, Liu R, Guo H. Design of Large Deployable Networks Constructed by Myard Linkages. CEAS Space Journal. 2013. Vol. 5. P. 147–155. doi: 10.1007/s12567-013-0036-7

29. D. ter Haar. Elements of Hamiltonian mechanics Pergamon Press Second Edition University Reader in Theoretica 1 Physics. Oxford, 1971. 212 p.

A. Kalynovskyi, *PhD, Associate Professor, Head of the Department*
L. Kutsenko, *DSc, Professor*
O. Sukharkova, *Lecturer of the Department*
S. Nazarenko, *PhD, Associate Professor, Deputy Head of the Department*
O. Diachkov, *PhD, Lecturer of the Department*
Y. Hrynko, *PhD, Lecturer of the Department*
National University of Civil Protection of Ukraine, Cherkasy, Ukraine

MODELING THE DEPLOYMENT OF ROD STRUCTURES AS MULTILINK PENDULUMS UNDER MICROGRAVITY CONDITIONS

A new approach to modeling the transformation of rod structures in microgravity by investigating elements of their frameworks, represented as multi-link pendulums. A geometric model is presented for the deployment of such structures under the influence of pulsed thrusts from jet engines mounted at the endpoints of the links. The deployment mechanism is based on initiating inertial motion without continuous external control after a brief impulse application. The dynamics of the deployment process are described using Lagrange's equations of the second kind, with particular emphasis on adapting the formulation to microgravity conditions, where potential energy can be considered negligible. This enables accurate modeling of structure deployment driven solely by kinetic energy, without further external control. As a result of the impulse action, the pendulum deploys by inertia, justifying the use of the term «inertial deployment method» for the frame. Mathematical models and a computer animation method are developed to predict the time evolution of link positions and to determine the fixation moment («stop code») for achieving the desired structure geometry. The influence of impulse magnitude errors on deployment accuracy is studied, and acceptable tolerance limits are established to maintain a satisfactory configuration. Test examples are provided for the deployment of double-link and four-link pendulums, as well as special configurations such as the Magdeburg pendulum and the Thomson-Tait pendulum. The obtained results are well-suited for animation to visualize the dynamics of rod structure formation—for example, illustrating the deployment of support frameworks for solar mirrors or space antennas. The proposed methods allow for the simplification of deployment technologies for large space objects, eliminating the need for complex electromechanical drives and thus reducing the mass and cost of space missions.

Keywords: core construction, process of opening in space, multi-link pendulum, Lagrange equation

References

1. Alpatov, A. P., Horbulyn, V. P. (2013). Kosmycheskye platformy dlia orbytalnykh promyshlennykh kompleksov: problemy i perspektivy. Visnyk NAN Ukrainy, 12, 26–38.

2. Alpatov, A. P., Belonozhko, P. A., Belonozhko, A. A., Vytushkyn, A. A. (2007). Bolshye otrazhaiushchye poverkhnosty v kosmose. Antenny sputnykoi sviazy. Systemni tekhnolohii, 3(50),73–87.

3. Alpatov, A. P., Belonozhko, P. A., Belonozhko, A. A., Vytushkyn, A. A. (2007). Bolshye otrazhaiushchye poverkhnosty v kosmose. Radoteleskopy, solnechnye kontsentratory, ploskye otrazhately. Systemni tekhnolohii, 3(50), 88–101.

4. Hoyt, R. (2015). SpiderFab. Architecture for On-Orbit Manufacture of Large Aperture Space Systems. FISO Briefing, 33.

5. Alpatov, A. P. (2013). Dynamika perspektyvnykh kosmichnykh aparativ. Visnyk NAN Ukrainy, 7, 6–13.

6. Udwadia, F. E., Koganti, P. B. (2015). Dynamics and control of a multi-body planar pendulum. Nonlinear Dynamics, 82, 1–2, 1059–1059. doi: 10.1007/s11071-015-2362-0

7. Lope, A. M., Machado, J. A. (2017). Dynamics of the N-link pendulum: a fractional perspective. International Journal of Control, 90, 6, 1192–1192.

8. Fritzkowski, P., Kaminski, H. (2008). Dynamic of a rope as a rigid multibody system. Journal of mechanics of materials and structures, 3, 6, 1059–1075.

9. Szuminski, W. (2014). Dynamics of multiple pendula without gravity. Chaotic Modeling and Simulation, 57–67. Available at: https://www.researchgate.net/publication/285143816_Dynamics_of_multiple_pendula_without_gravity

10. Pisculli, A., Felicetti, L., Gasbarri, P., Palmerini, G B., Sabatini, M. (2013). Deployment analysis and control strategies of flexible space manipulators, in: Proceedings of the International Astronautical Congress. China. Available at: https://www.researchgate.net/publication/288131553_Deployment_analysis_and_control_strategies_of_flexible_space_manipulators

11. Sakovsky, M., Pellegrino, S., Mallikarachchi, H. M. Y. C. (2016). Folding and Deployment of Closed Cross-Section Dual-Matrix Composite Booms. 3rd AIAA Spacecraft Structures Conference. doi:10.2514/6.2016-0970

12. Ma, X., An, N., Cong, Q. et al. (2024). Design, modeling, and manufacturing of high strain composites for space deployable structures. Communications Engineering, 78. doi:10.1038/s44172-024-00223-2

13. Deployable Perimeter Truss with Blade Reel Deployment Mechanism. (2016). NASA’s Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.Tuesday. Available at: https://www.techbriefs.com/component/content/article/tb/techbriefs/mechanics-and-machinery/24098

14. Shamakhanov, V. K., Khoroshylov, S. V. (2025). Osoblyvosti stvorennia ta vykorystannia kosmichnykh strilopodibnykh konstruktsii, shcho transformuiutsia. Journal of Rocket-Space Technology, 34(1), 3–20. doi: 10.15421/4525015

15. Jennings, A. L., Black, J., Allen, C. (2013). Empirically Bounding of Space Booms with Tape Spring Hinges. Shock and Vibration, 20, 503–518. doi:10.3233/SAV-130764

16. Liu, T.-W., Bai, J.-B., Fantuzzi, N. (2022). Folding behavior of the thin-walled lenticular deployable composite boom: Analytical analysis and many-objective optimization. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 30, 11, 2221–2239. doi: 10.1080/15376494.2022.2053766

17. Yang, H., Guo, H., Wang, Y., Feng, J., Tian, D. (2020). Analytical solution of the peak bending moment of an M boom for membrane deployable structures. International Journal of Solids and Structures, 206, 236–246. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.09.005

18. Martınez-Alfaro, H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for N pendulums using Maple. Available at: https://www.researchgate.net/publication/228781742_Obtaining_the_dynamic_equations_their_simulation_and_animation_for_n_pendulums_using_Maple

19. Xu, Y., Guan, Fu-ling, Zheng, Y., Zhao, M. (2012). Kinematic Analysis of the Deployable Truss Structures for Space Applications. J. Aerosp. Technol. Manag., Sao Jose dos Campos, 4, 4, 453–462. doi: 10.5028/jatm.2012.04044112

20. Hoyt, R., Cushing, J., Slostad, J. (2013). SpiderFab: Process for On-Orbit Construction of Kilometer-Scale Apertures. NASA Goddard Space Flight Center 8800 Greenbelt Road Greenbelt, MD 20771, 53.

21. Kutsenko, L., Shoman, O., Semkiv, O., Zapolsky, L., Adashevskay, I., Danylenko, V., Semenova-Kulish, V., Borodin, D., Legeta, J. (2017). Geometrical modeling of the inertial unfolding of a multi-link pendulum in weightlessness. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6/7(90), 42–50.

22. Kutsenko, L. M. (2017). Iliustratsii do heometrychnoho modeliuvannia inertsiinoho rozkryttia bahatolankovoho maiatnyka u nevahomosti. Available at: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/4868

23. Kutsenko, L., Semkiv, O., Zapolskiy, L., Shoman, O., Kalinovskiy, A., Piksasov, M., Adashevska, I., Shelihova, I., Sydorenko, O. (2018). Geometrical modeling of the process of weaving a cloth in weightlessness using the inertial unfolding of dual pendulum. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1/7 (91), 37–46. doi: 10.15587/1729-4061.2017.114269

24. Kutsenko, L. (2018). Iliustratsii do heometrychnoho modeliuvannia protsesu rozkryttia sterzhnevykh konstruktsii u nevahomosti. Available at: http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/6335

25. Kutsenko, L., Semkiv, O., Zapolskiy, L., Shoman, O., Ismailova, N., Vasyliev, S., Adashevska, I., Danylenko, V., Pobidash, A. (2018) Geometrical modeling of the shape of a multilink rod structure in weightlessness under the influence of pulses on the end points of its links. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2/7(92), 44–58. doi: 10.15587/1729-4061.2018.126693

26. Chaotic Pendulum. Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations. Available at: https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/chaotic-pendulum

27. Space_Structure_Systems_Laboratory. Self deployable truss, 2016. YouTube. URL: https://www.youtube.com/watch?v=sH7NHZwPzMM

28. Qi, X., Deng, Z, Li, B, Liu, R, Guo, H. (2013). Design of Large Deployable Networks Constructed by Myard Linkages. CEAS Space Journal, 5, 147–155. doi: 10.1007/s12567-013-0036-7

29. D. ter Haar. (1971). Elements of Hamiltonian mechanics Pergamon Press Second Edition University Reader in Theoretica 1 Physics. Oxford, 212.

Надійшла до редколегії: 23.02.2025
Прийнята до друку: 22.04.2025